

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Emmanuel Plaut

Jean-Philippe Chateau, Denis Fünfschilling, Yann Gunzburger,
Rainier Hreiz, Mathieu Jenny, Marc Ponçot & Jean-Baptiste Vaney

Séance 9

Analyse dimensionnelle et similitude Applications à la mécanique des fluides

- 1 Principes de l'analyse dimensionnelle
- 2 1er exemple d'application : écoulements dans un tuyau
- 3 2ème exemple : écoulements autour d'un obstacle cylindrique
- 4 Informations - Questions

1 Principes de l'analyse dimensionnelle

Toute **grandeur physique** ϕ rencontrée en mécanique classique a une **dimension physique** produit de puissances des **dimensions physiques fondamentales** masse m , longueur ℓ et temps t ,

$$\phi \equiv m^\alpha \ell^\beta t^\gamma$$

« ϕ est homogène au produit d'une masse puissance α
par une longueur puissance β
par un temps puissance γ »

(α, β, γ) **exposants des dimensions fondamentales**

$m^\alpha \ell^\beta t^\gamma$ **fonction de dimensions** de ϕ

1 Principes de l'analyse dimensionnelle

$$\forall \phi, \quad \exists (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{tels que} \quad \phi \equiv \underbrace{m^\alpha l^\beta t^\gamma}_{\text{fonction de dimensions de } \phi}$$

La fonction de dimensions de ϕ se déduit de sa formule de définition physique :

$$\phi = \text{vitesse } \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt} \implies v \equiv \frac{l}{t} \equiv l t^{-1}$$

$$\phi = \text{accélération } \bar{\gamma} = \frac{d\bar{v}}{dt} \implies \gamma \equiv \frac{v}{t} \equiv l t^{-2}$$

$$\phi = \text{force } \bar{F} = m \bar{\gamma} \implies F \equiv m l t^{-2}$$

$$\phi = \text{gradient de pression } \bar{\nabla} p \implies \bar{\nabla} p \equiv m l^{-2} t^{-2}$$

L'analyse dimensionnelle est liée au problème de la mesure des grandeurs physiques par choix d'un système d'unités

Mesure des grandeurs fondamentales :

Comparaison à des **étalons de mesure** :

$$\text{mes}(m) = \frac{m}{M} \quad \text{avec} \quad M = 1 \text{ kg dans le SI}$$

$$\text{mes}(\ell) = \frac{\ell}{L} \quad \text{avec} \quad L = 1 \text{ m dans le SI}$$

$$\text{mes}(t) = \frac{t}{T} \quad \text{avec} \quad T = 1 \text{ s dans le SI}$$

Mesure des grandeurs dérivées :

La **fonction de dimensions** détermine l'**unité dérivée**.

Par exemple

$$p = \text{pression} \equiv m^1 \ell^{-1} t^{-2} \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg}/(\text{m s}^2) .$$

Toute équation de la physique doit être invariante par changement de système d'unité donc

homogène dimensionnellement :

fonctions de dimensions de tous les termes identiques.

Dans le cas contraire on a une équation

inhomogène dimensionnellement !

Vous devez toujours tester l'homogénéité dimensionnelle de vos formules, pour éliminer des **erreurs (INHD)**.

Exemple : 2 formules du laplacien en cylindriques se contredisent :

$$(F1) \iff \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$(F2) \iff \Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad \text{INHD !}$$

Qui a tort, qui a raison ? **F2 a forcément tort.** F1 a peut-être raison.

Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

Cf. l'exemple de la **sonde américaine Mars Climate Orbiter**, construite pour la partie infrastructures et moteurs par **Lockheed Martin Astronautics** pour la **NASA** en 1997-98 :



Coût de la sonde
 $\simeq 200$ M\$

Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

sonde américaine Mars Climate Orbiter,
lancée par la **NASA**, sous le contrôle du **Jet Propulsion Laboratory**,
en décembre 1998 :

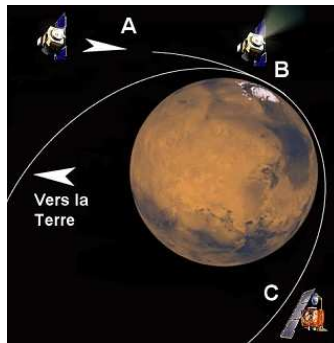


Coût du lancement
 ≈ 90 M\$

Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

sonde américaine Mars Climate Orbiter,
pilotée vers Mars sous le contrôle du **Jet Propulsion Laboratory,**
de façon à préparer sa mise en orbite,
entre décembre 1998 et septembre 1999.

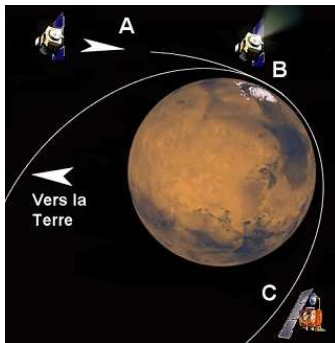
Le 23 septembre 1999 devait avoir lieu cette mise en orbite elliptique par freinage moteur, la sonde devant passer à 140 km environ de Mars :



Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

la sonde américaine Mars Climate Orbiter,
disparaît à jamais le 23 septembre 1999 à 11h06 !

Sonde passée à 57 km de Mars donc **brulée dans son atmosphère** !
Dans les manœuvres de pilotage de la sonde, les ingénieurs du JPL
envoyaient des **commandes de poussée** qu'ils croyaient en **Newton** au
moteur de LMA qui les interprétait en **livre-force** !



Coût de l'**erreur d'unité**

≈ 300 M\$

1 Théorème π (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

- Soit un système physique dépendant de **paramètres de contrôle** $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ numérotés d. s. q. les 3 premières colonnes de la **matrice des exposants des dimensions**

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	\dots	ϕ_k	\dots	ϕ_n
m	α_1	α_2	α_3	\dots	α_k	\dots	α_n
ℓ	β_1	β_2	β_3	\dots	β_k	\dots	β_n
t	γ_1	γ_2	γ_3	\dots	γ_k	\dots	γ_n

forment une matrice 3×3 inversible

$\Leftrightarrow \phi_1, \phi_2, \phi_3$ **grandeurs fondamentales**

dimensionnellement indépendantes.

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements** π

$$\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}} \equiv 1 \quad \text{pour } k = 4, \dots, n.$$

1 Théorème π (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements** π

$$\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}} \equiv 1 \quad \text{pour } k = 4, \dots, n.$$

- **Adimensionner** de même la **grandeur physique dépendante** d'intérêt ϕ , i.e. introduire

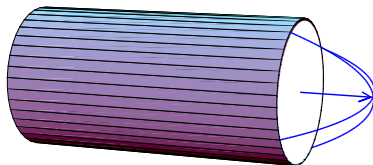
$$\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0} \phi_3^{c_0}} \equiv 1 .$$

- Alors la relation $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ doit pouvoir s'écrire sous la **forme adimensionnelle**

$$\pi_0 = \mathcal{F}(\pi_4, \dots, \pi_n) .$$

1er exemple d'application : écoulements dans un tuyau droit

On rappelle que l'écoulement **laminaire** a une **forme universelle**, celle de l'**écoulement de Hagen-Poiseuille** :

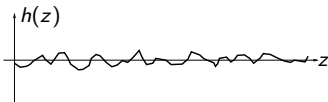


$$\bar{\mathbf{v}} = W_0 (1 - 4r^2/d^2) \bar{\mathbf{e}}_z, \quad \hat{p} = \hat{p}_0 - Gz, \quad W_0 = Gd^2/(16\eta).$$

Étude d'écoulements généraux éventuellement turbulents

1er exemple d'application : écoulements dans un tuyau droit

- ▷ 3 grandeurs fondamentales : **diamètre** d , **masse volumique** ρ , **vitesse débitante** V ;
- ▷ 3 paramètres adimensionnels : **longueur réduite** $\pi_4 = L/d \gg 1$, **rugosité relative des parois** $\pi_5 = \varepsilon = e/d$ avec $e = \sqrt{\langle h^2 \rangle_z}$



nombre de Reynolds $1/\pi_6 = Re = Vd/\nu$.

- ▷ Grandeur dépendante **perte de charge** $\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon)$
avec λ **coefficient de perte de charge**.

- ▷ Paramètres adimensionnels Re et ε égaux \iff systèmes **similaires**.

- ▷ En écoulement **laminaire**, $\lambda = 64/Re$.

Étude de la transition vers la turbulence

Soit une petite perturbation $\bar{\mathbf{v}}$ de la vitesse laminaire $\bar{\mathbf{V}}$.

Au début elle évolue suivant l'équation de Navier-Stokes linéarisée :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \underbrace{\left(\overline{\nabla \cdot \mathbf{V}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}}}_{\text{termes d'advection}} = \underbrace{\nu \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}}_{\text{terme visqueux}} .$$

Si le terme visqueux domine,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \simeq \nu \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}} ,$$

la perturbation **diffuse** donc est **amortie**.

Si les termes d'advection dominant,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \simeq - \left(\overline{\nabla \cdot \mathbf{V}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} - \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} ,$$

la perturbation peut être **amplifiée** \longleftrightarrow **instabilité !**

Étude de la transition vers la turbulence dans un tuyau

Éq. de Navier-Stokes linéarisée pour une petite perturbation $\bar{\mathbf{v}}$ de $\bar{\mathbf{V}}$:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \underbrace{\left(\overline{\nabla \cdot \mathbf{V}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \left(\overline{\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}}}_{\text{termes d'advection}} = \underbrace{\nu \Delta \bar{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}} .$$

On s'attend à avoir transition lorsque

$$\text{odg}(\text{termes d'advection}) \gg \text{odg}(\text{terme visqueux})$$

$$\iff \frac{V}{d} \nu \gg \nu \frac{\nu}{d^2}$$

$$\iff Re = \frac{\text{odg}(\text{termes d'advection})}{\text{odg}(\text{terme visqueux})} = \frac{Vd}{\nu} \gg 1 .$$

De fait, dans un tuyau, seul Re détermine le **régime d'écoulement** :

$Re \lesssim 2000 \iff$ écoulement **laminaire**,

$4000 \lesssim Re \iff$ écoulement **turbulent**.

Bémols : malheureusement la transition vers la turbulence est plus compliquée

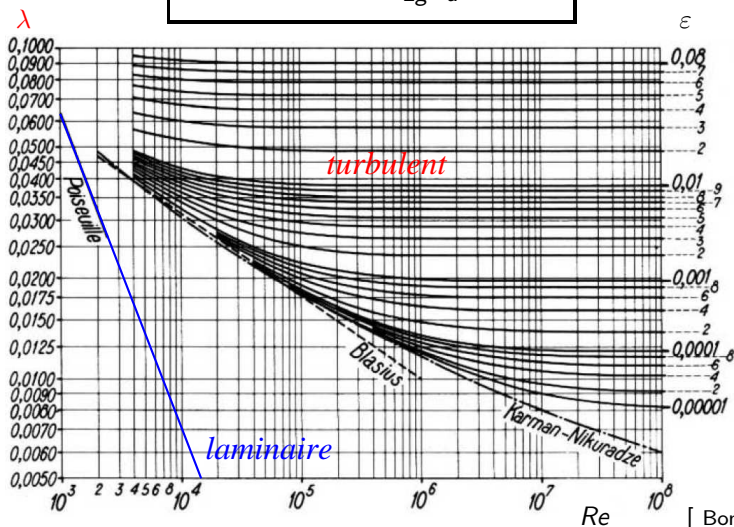
On ne peut la décrire à partir de l'étude de l'éq. de Navier-Stokes linéarisée pour une petite perturbation $\bar{\mathbf{v}}$ de $\bar{\mathbf{V}}$:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \left(\overline{\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} + \left(\overline{\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} = - \overline{\overline{\nabla p}} + \nu \overline{\overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}}$$

- \exists perturbation de pression !
- le terme fortement non linéaire joue un rôle crucial !
- l'amplitude des perturbations joue aussi !...

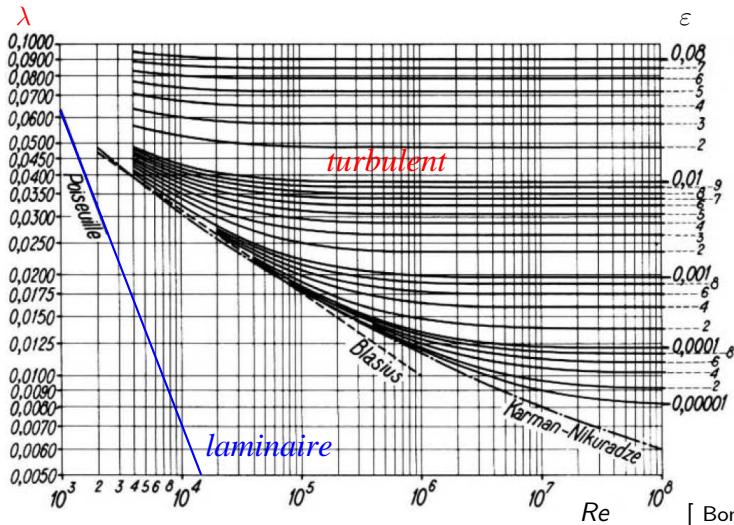
Coefficients de perte de charge dans un tuyau droit :

$$\delta H = H_e - H_s = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon)$$



Dans un tuyau de pompier de 50 mètres, avec $q = 10$ l/s,

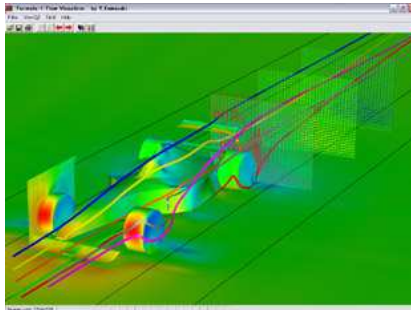
$$\delta H = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon) \simeq 4 \text{ mètres d'eau, cf. l'exercice 7.1...}$$



2ème exemple : écoulements autour d'obstacles

Les **écoulements autour d'obstacles** sont d'une importance capitale en **aérodynamique** et **hydrodynamique**...

Exemple : expérience numérique de l'équipe du Professeur Suzuki
(Department of Aeronautics and Astronautics, U-Tokyo) :

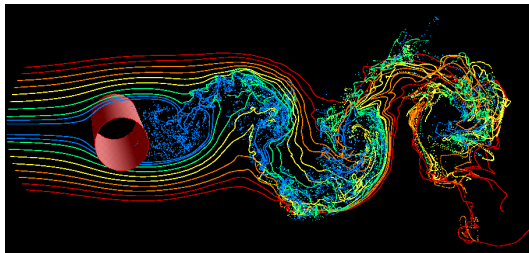


Cependant ils sont très complexes

⇒ étudier le cas d'une **géométrie simple**

Écoulements autour d'un cylindre à section circulaire

Exemple : expérience numérique de Breuer (LSTM, U-Erlangen-Nürnberg) :



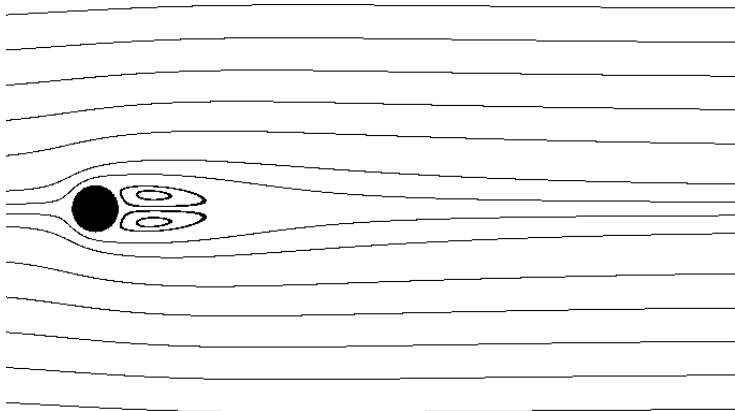
Analyse dimensionnelle :

- ▶ 3 grandeurs fondamentales, le **diamètre** d , la **masse volumique** ρ et la **vitesse débitante** V ;
- ▶ 1 seul **paramètre de contrôle adimensionnel**, le **nombre de Reynolds**

$Re = \frac{V d}{\nu}$	{	$Re < 48$	↔	écoulement permanent
		$48 < Re < 200$	↔	écoulement oscillant
		$200 < Re$	↔	écoulement oscillant turbulent

Écoulement autour d'un cylindre à $Re = 40$: 2D stationnaire

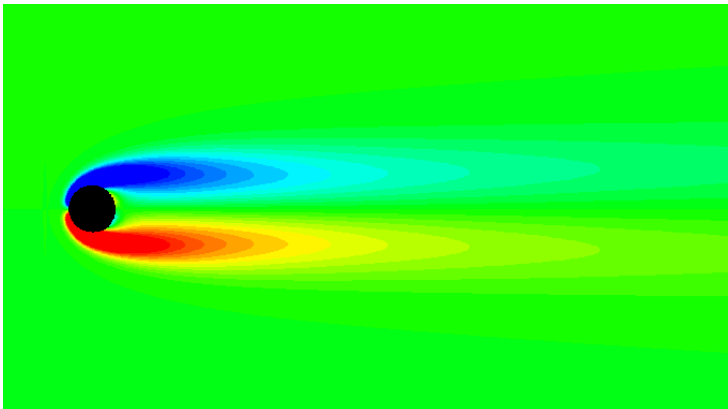
lignes de courant :



[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

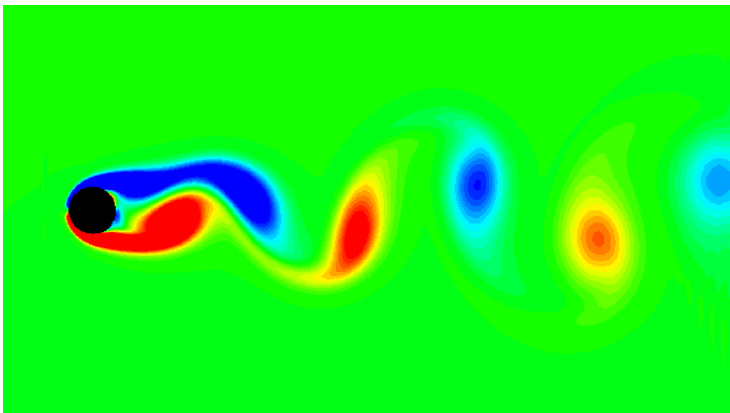
Écoulement autour d'1 cylindre à $Re = 40$: 2D stationnaire

champ de vorticité

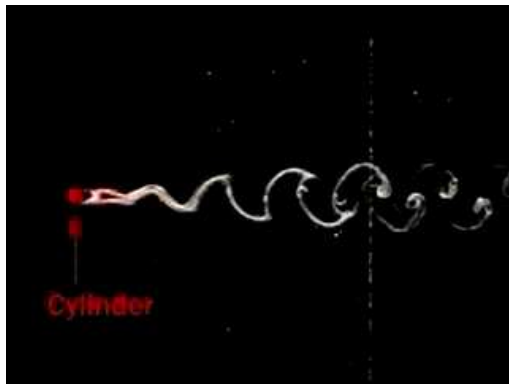


[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

À Re plus élevé (ici 100)
cet écoulement stationnaire est **instable**,
au profit d'un écoulement oscillant :



Ce lâcher régulier de tourbillons de Bénard-Von-Karman est aussi vu **expérimentalement**, ici à $Re \simeq 200$:



[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press
Film de l'ONERA]

Des écoulements aérodynamiques autour d'obstacles plus grands, les îles du Cap-Vert, montrent aussi une **allée de vortex de Bénard-Von-Karman**, confirmant l'**universalité** du phénomène



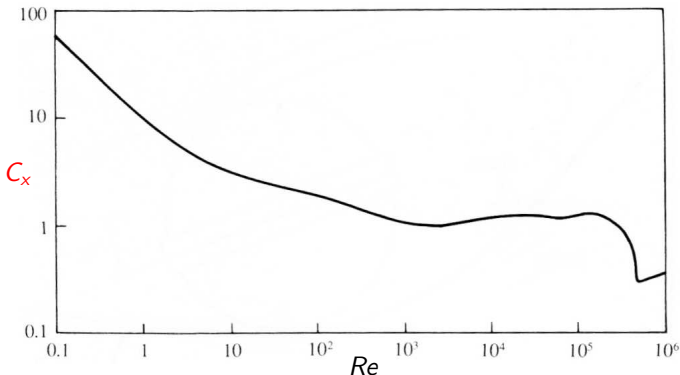
[Photo. par le satellite Terra
<http://visibleearth.nasa.gov>]

Écoulements autour d'un cylindre à section circulaire

L'analyse dimensionnelle montre aussi que la grandeur dépendante **force de traînée par unité de longueur**

$$f_x = \frac{1}{2} \rho V^2 d C_x(Re)$$

∃ **courbe universelle** mesurée par des expérimentateurs courageux :



Des écoulements aérodynamiques autour d'obstacles profilés,
tels une voiture, montrent aussi des **lâchers de vortex** ;
dans ce cas la minimisation du C_x t.q. la traînée

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 S_x C_x(Re)$$

a un intérêt énergétique & économique clair...



Informations

- ▶ Programme du TD :
 - ▶ Pb 6.4 *Vidange d'un réservoir par un tuyau* qu'il fallait préparer...
 - ▶ Ex. 7.2 *Déversoir* et 7.3 *Hélice d'avion*.
- ▶ À la fin du TD on vous distribuera une **fiche individuelle d'évaluation pédagogique de ce module**, à remettre ce jour ou au plus tard le jour du test 2.
- ▶ RV suivant : **test 2 lundi 16 janvier** ; des précisions seront données d'ici le 12 sur www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc .
- ▶ La **base** de votre évaluation = Note(test 1) + Note(test 2) sera pondérée par votre chargé de TD.

Rappel : équipe pédagogique pour le TD :

Chargé de TD	Laboratoire	Spécialité	Groupe(s)	Salle
Y. Gunzburger	Laego	Géomécanique	X1	337
M. Jenny	Lemta	Méca. des fluides	X2	338
R. Hreiz	LRGP	Méca. des fluides	X3 & Y3	339
J.-B. Vaney	IJL	Méca. des matériaux	X4 & Y4	341
J.-P. Chateau	IJL	Méca. des matériaux	X5	342
D. Fünfschilling	LRGP	Méca. des fluides	Y1	337
M. Ponçot	IJL	Méca. des matériaux	Y2	338

Annonce concernant le groupe Y2 :

M. Ponçot absent (en congrès international sur la Plasticité) remplacé par M. Jenny.

Avez-vous des questions ?